

NOMS Prénoms des élèves du groupe :

- 
- 

### Travail de groupe n° 6

1 heure

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4-Partie 1	Exercice 4-Partie 2	BONUS	Tenue du groupe
Total	4	4	4	3,5	3,5	2	1

**Exercice 1**

**QCM :** Pour chacune des questions, une seule des réponses a, b ou c est exacte. Entourer les bonnes réponses. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, l'absence de réponse ou une réponse fausse n'enlève pas de point.

1. On lance un dé cubique équilibré. Les faces sont numérotées de 1 à 6.

La probabilité d'obtenir une face numérotée par un multiple de 3 est

- $\frac{1}{6}$
- $\frac{1}{3}$
- $\frac{1}{2}$

2. Soient A et B deux évènements tels que  $p(A) = 0,2$ ,  $p(B) = 0,3$  et  $p(A \cap B) = 0,1$ ; alors

- $p(A \cup B) = 0,4$
- $p(A \cup B) = 0,5$
- $p(A \cup B) = 0,6$

3. Soient A et B deux évènements indépendants de probabilité non nulle, alors on a obligatoirement :

- $p(A \cap B) = 0$
- $p_A(B) = p_B(A)$
- $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

4. Une expérience aléatoire a trois issues possibles : 2; 3 et a (où a est un réel).

On sait que  $p(2) = \frac{1}{2}$ ,  $p(3) = \frac{1}{3}$  et  $p(a) = \frac{1}{6}$ .

On sait de plus que l'espérance mathématique associée est nulle. On a alors

- $a = -12$
- $a = 6$
- $a = -5$

**Exercice 2**

Un magasin commercialise des canapés et des tables de salon.

Quand un client se présente, il achète au plus un canapé et au plus une table de salon. Une étude a montré que :

- la probabilité pour qu'un client achète un canapé est  $0,24$  ;
- la probabilité pour qu'un client achète une table de salon quand il a acheté un canapé est  $0,25$  ;
- la probabilité pour qu'un client achète une table de salon quand il n'achète pas de canapé est  $0,1$ .

On choisit un client au hasard parmi ceux ayant participé à l'étude. On note :

- $C$  l'évènement « le client achète un canapé » et  $\bar{C}$  son évènement contraire ;
- $T$  l'évènement « le client achète une table de salon » et  $\bar{T}$  son évènement contraire.

1. Construire ci-dessous un arbre pondéré décrivant la situation.

2. Calculer la probabilité que le client achète un canapé et une table de salon.

3. Montrer que la probabilité  $P(T)$  est égale à  $0,136$ .

4. Dans ce magasin, le prix moyen d'un canapé est de  $1\,000$  € et le prix moyen d'une table de salon est de  $300$  €. On note  $X$  la variable aléatoire correspondant à la somme payée par le client.

(a) Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de  $X$ .

$x_i$	0	300	1 000	1 300
$P(X = x_i)$				

(b) Calculer l'espérance de  $X$ .

Donner une interprétation de ce nombre dans le contexte de l'exercice.

**Exercice 3**

Un site internet propose des jeux en ligne.

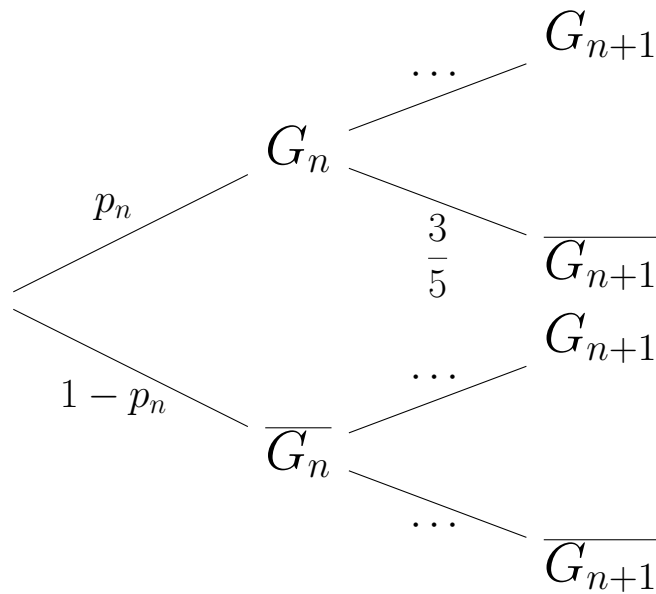
Pour un premier jeu :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à  $\frac{2}{5}$ .
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à  $\frac{4}{5}$ .

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on désigne par  $G_n$  l'évènement « l'internaute gagne la  $n$ -ième partie » et on note  $p_n$  la probabilité de l'évènement  $G_n$ .

L'internaute gagne toujours la première partie et donc  $p_1 = 1$ .

1. Compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{1}{5}(1 - p_n)$
3. En déduire que, pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$ .
4. Pour tout  $n$  entier naturel non nul, on pose  $u_n = p_n - \frac{1}{4}$ .
  - (a) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{5}$  et de premier terme  $u_1$  à préciser.
  - (b) Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$  (pour cela on donnera d'abord la forme explicite de la suite  $(u_n)$ ).
  - (c) À l'aide de la calculatrice, conjecturer sur la limite de  $p_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini et expliquer ce que cela signifie dans le contexte de l'énoncé.

**Exercice 4**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

**Partie 1**

Julien doit prendre l'avion ; il a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport.

S'il prend le bus de 8 h, il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol.

Par contre, le bus suivant ne lui permettrait pas d'arriver à temps à l'aéroport.

Julien est parti en retard de son appartement et la probabilité qu'il manque son bus est de 0,8.

S'il manque son bus, il se rend à l'aéroport en prenant une compagnie de voitures privées ; il a alors une probabilité de 0,5 d'être à l'heure à l'aéroport.

On notera :

- $B$  l'évènement : « Julien réussit à prendre son bus » ;
- $V$  l'évènement : « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol ».

1. Donner la valeur de  $P_B(V)$ .
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Montrer que  $P(V) = 0,6$ .
4. Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ? Justifier.

**Partie 2**

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On appelle cette pratique le surbooking. Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5% de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.

Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1. On admet que  $X$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?
3. Calculer la probabilité que 201 passagers se présentent à l'embarquement. Le résultat sera arrondi à  $10^{-3}$  près.
4. Calculer  $P(X \leq 200)$ , le résultat sera arrondi à  $10^{-3}$  près. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

**BONUS**

5. La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros.

Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé.

On appelle  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet ;  $C$  la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol. On admet que  $Y$  suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

$y_i$	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	

- (a) Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus en calculant  $P(Y = 6)$ .
- (b) Justifier que :  $C = 51\,500 - 850Y$ .
- (c) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire  $C$  sous forme d'un tableau.  
Calculer l'espérance de la variable aléatoire  $C$  à l'euro près.
- (d) Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.